第 2 講　2次曲線と直線

PART1　2次曲線と直線の共有点

要点整理と公式

要点 ①　2次曲線と直線の共有点

2次曲線 $f(x,\ y)=0$　……①と直線 $ax+by+c=0$　……②の共有点の座標は，

①と②を連立させた連立方程式の実数解によって与えられる。

(ex) 放物線 $y^2=4x$ と直線 $y=-2x+4$ の共有点の座標

$$\begin{cases} y^2=4x & \cdots\cdots① \\ y=-2x+4 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②を①に代入すると

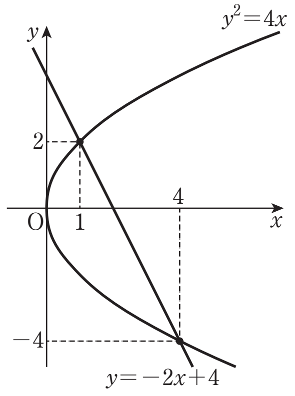
$(-2x+4)^2=4x$

$x^2-5x+4=0$　　　$x=1,\ 4$

このとき②より

$x=1$ のとき　$y=2$　　　$x=4$ のとき　$y=-4$

よって，共有点の座標は $(1,\ 2)$，$(4,\ -4)$



要点 ②　2次曲線と直線の共有点の個数

2次曲線 $f(x,\ y)=0$　……①と直線 $ax+by+c=0$　……②の共有点の個数は，

①と②から1文字を消去して得られる方程式が2次方程式の場合，その判別式を D とすると

$D>0$　$\Longleftrightarrow$　異なる2つの実数解をもつ

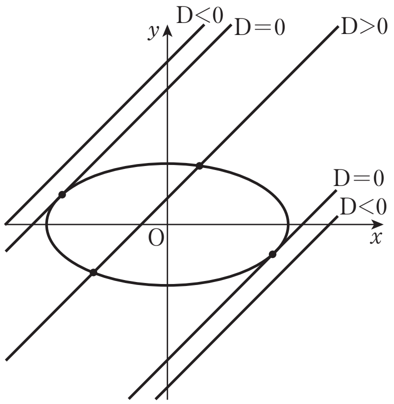
　　　$\Longleftrightarrow$　①と②の共有点の個数は2個

$D=0$　$\Longleftrightarrow$　1つの実数解(重解)をもつ

　　　$\Longleftrightarrow$　①と②の共有点の個数は1個

$D<0$　$\Longleftrightarrow$　実数解なし

　　　$\Longleftrightarrow$　①と②の共有点の個数は0個



特に $D=0$ のとき，直線は2次曲線に「接する」

といい，この直線を2次曲線の「接線」，共有点を「接点」という。

※①と②を連立させた方程式が1次方程式の場合は，その方程式が

　1つの実数解をもつ　$\Longleftrightarrow$　①と②の共有点の個数は1個

[MEMO]

1 (1) 次の曲線と直線の共有点の座標を求めよ。

(i) $y^2=6x$, $x-2y+6=0$

(ii) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=-1$, $3x-2y-2=0$

(2) k を定数とする。楕円 $2x^2+y^2=4$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x+k$ の共有点の個数を求めよ。

Point Pickup

2次曲線と直線の共有点

2次曲線と直線の共有点の座標は，方程式を連立させた連立方程式の「　　　」によって得られる。

1文字消去して得られる方程式が2次方程式の場合

$D>0$ $\Longleftrightarrow$ 共有点の個数は「　」個

$D=0$ $\Longleftrightarrow$ 共有点の個数は「　」個（接する）

$D<0$ $\Longleftrightarrow$ 共有点の個数は「　」個

第 2 講 PART1 確認問題

1 放物線 $y^2=4x$ と直線 $x-y+1=0$ の共有点の座標は，

$\left(\boxed{ア}, \boxed{イ}\right)$ である。

2 楕円 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$ と直線 $x-2y+2=0$ の共有点の x 座標

は，$\boxed{ウ}$，$\boxed{エオ}$ である。

3 k を定数とする。

双曲線 $3x^2-y^2=3$ と直線 $y=2x+k$ の共有点の個数は，

$-\boxed{カ}<k<\boxed{カ}$ のとき，　$\boxed{キ}$ 個

$k=\pm\boxed{カ}$ のとき，　$\boxed{ク}$ 個

$k<-\boxed{カ}$，$\boxed{カ}<k$ のとき，　$\boxed{ケ}$ 個

である。

第 2 講　2次曲線と直線

PART1　2次曲線と直線の共有点

1　(1)　次の曲線と直線の共有点の座標を求めよ。

(i)　$y^2=6x$，$x-2y+6=0$

(ii)　$\dfrac{x^2}{4}-y^2=-1$，$3x-2y-2=0$

(2)　k を定数とする。楕円 $2x^2+y^2=4$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x+k$ の共有点の個数を求めよ。

[解答]

(1)(i)　$\begin{cases} y^2=6x & \cdots\cdots① \\ x-2y+6=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

②より $x=2y-6$

これを①に代入して

$y^2=6(2y-6)$

$y^2-12y+36=0$

$(y-6)^2=0$　　$y=6$

このとき②より $x=6$

よって，共有点の座標は $(6,\ 6)$

(ii)　$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-y^2=-1 & \cdots\cdots① \\ 3x-2y-2=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より　$x^2-4y^2=-4$　$\cdots\cdots①'$

②より　$2y=3x-2$　$\cdots\cdots②'$

②′ を ①′ に代入して

$x^2-(3x-2)^2=-4$

$2x^2-3x=0$

$x(2x-3)=0$　　$x=0,\ \dfrac{3}{2}$

②′ より $x=0$ のとき $y=-1$　　$x=\dfrac{3}{2}$ のとき $y=\dfrac{5}{4}$

よって，共有点の座標は $(0,\ -1)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{4}\right)$

(2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=4 & \cdots\cdots ① \\ y=\dfrac{1}{2}x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して

$$2x^2+\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2=4$$

$$9x^2+4kx+4k^2-16=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-9(4k^2-16)=-32k^2+144$$

$D>0$ のとき，$-32k^2+144>0$　　$k^2<\dfrac{9}{2}$　　$-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<k<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

したがって共有点の個数は

$D>0$ すなわち $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<k<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 2 個

$D=0$ すなわち $k=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 1 個

$D<0$ すなわち $k<-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<k$ のとき 0 個

第 2 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2

[解説]

$$\begin{cases} y^2=4x & \cdots\cdots ① \\ x-y+1=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$ [A]

②より，$x=y-1$　……③

これを①に代入すると，

$y^2=4(y-1)$

$y^2-4y+4=0$

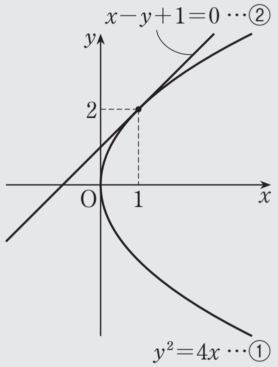
$(y-2)^2=0$

$y=2$

このとき，③より，$x=1$

よって，共有点の座標は，**(1，2)** [B]

[A]　①，②の連立方程式の実数解が，共有点の x，y 座標である。



[B]　このとき，放物線と直線は点 (1，2) で接する。

2

[正解] ウ：2，エオ：−4

[解説]

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1 & \cdots\cdots ① \\ x-2y+2=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より，$x^2+4y^2=20$　……①′

②より，$2y=x+2$　……②′

②′を①′に代入すると，[C]

$x^2+(x+2)^2=20$

$2x^2+4x-16=0$

$x^2+2x-8=0$

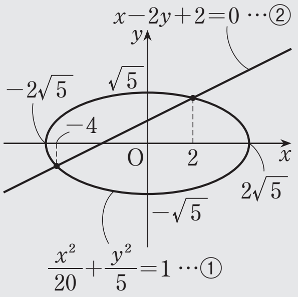
$(x-2)(x+4)=0$

$x=2,\ -4$

よって，共有点の x 座標は，

2，−4

[C]　①′は $x^2+(2y)^2=20$ と変形できるので，$2y$ の部分に $x+2$ を代入するとよい。



3 **[正解]** カ：1，キ：0，ク：1，ケ：2

[解説]

$$\begin{cases} 3x^2-y^2=3 & \cdots\cdots① \\ y=2x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②を①に代入して，

$$3x^2-(2x+k)^2=3$$

$$-x^2-4kx-k^2-3=0$$

$$x^2+4kx+\left(k^2+3\right)=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-1\cdot\left(k^2+3\right) \quad \text{[D]}$$

$$=3k^2-3$$

$$=3\left(k^2-1\right)$$

$D>0$ のとき，共有点は 2 個であり，このとき，

$k^2-1>0$ より，$k<-1$，$1<k$ [E]

$D=0$ のとき，共有点は 1 個であり，

このとき，$k^2-1=0$ より，$k=\pm1$

$D<0$ のとき，共有点はない。

このとき，$k^2-1<0$ より，$-1<k<1$

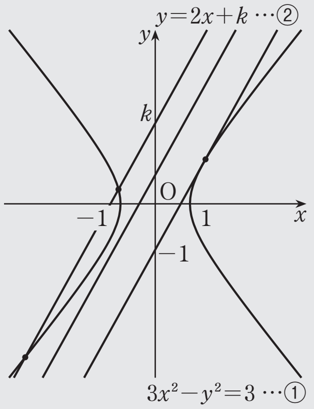
以上より，

$-1<k<1$ のとき，　0 個

$k=\pm1$ のとき，　1 個

$k<-1$，$1<k$ のとき，2 個

[D]　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

[E]　$D>0 \Longleftrightarrow$ 共有点 2 個
$D=0 \Longleftrightarrow$ 共有点 1 個
$D<0 \Longleftrightarrow$ 共有点なし